VẬN DỤNG TRI THỨC HÀM ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN Ở PHỔ THÔNG

TS. Đinh Quang Minh[1]

TÓM TẮT

Chủ đề hàm được xuất hiện xuyên suốt trong chương trình Toán học phổ thông, vì vậy việc vận dụng tri thức hàm để giải toán và thông qua đó rèn luyện kỹ năng giải toán là rất cần thiết. Bài viết tập trung vào việc chỉ ra những dạng toán ở phổ thông có thể giải được nhờ vận dụng tri thức hàm và nêu ra các định hướng giúp giáo viên có thể hướng dẫn học sinh tập luyên nhằm hình thành một số kỹ năng giải toán nhờ vào việc vận dụng tri thức hàm. Các dạng toán này có thể đưa ra từ lớp 10 và nó xuất hiện khá nhiều trong các đề thi vào đại học, cao đẳng và trung học phổ thông quốc gia.

***Từ khóa**: Tri thức hàm, kỹ năng giải toán, nội dung, ý tưởng, hoạt động*

Trong nhiều năm trở lại đây việc xuất hiện nhiều bài toán (BT) khó trong các kỳ thi vào Đại học & Cao đẳng hay kỳ thi trung học phổ thông quốc gia mà việc giải nó nhiều lúc phải vận dụng các kiến thức về hàm đang khá phổ biến. Các BT này liên quan đến các vấn đề như: giải hay biện luận phương trình (PT), hệ PT, chứng minh bất đẳng thức…, đây là những BT Đại số tuy nhiên khi giải nó thường vận dụng kiến thức của Giải tích. Vì thế khi dạy học, giáo viên (GV) cần có những BT mà việc giải nó phải vận dụng kiến thức liên phân môn. Các dạng toán này có thể xuất hiện từ lớp 10, khi mà một số tri thức hàm (TTH) được trang bị khá đầy đủ. Nếu được tập luyện sớm và có chủ định thì sẽ hình thành cho học sinh (HS) một số kỹ năng (KN) giải toán nhờ vào vào việc vận dụng TTH. Vấn đề là GV cần chú ý những dạng toán nào có thể giải được nhờ vận dụng vào TTH? Và có những hướng dẫn nào để giúp HS biết vận dụng TTH vào giải toán ở phổ thông.

1. Một số dạng toán ở phổ thông có thể giải được nhờ vận dụng tri thức hàm

Ở phổ thông các BT giải được theo hướng vận dụng TTH có thể chia sơ bộ thành hai loại: *Loại 1*: Những BT có nội dung đề cập trực tiếp đến chủ đề hàm, chẳng hạn như: BT khảo sát sự biến thiên của hàm số, chứng minh một điểm nào đó thuộc hay không thuộc đồ thị của một hàm số đã cho,… *Loại 2*: Những BT nhìn bề ngoài khó có thể nhận ra các mối liên hệ đến hàm. Những BT thường có chứa một trong các đặc trưng của hàm: tương ứng, biến thiên, phụ thuộc (có thể tường minh, hay không tường minh). Chẳng hạn như: BT chứng minh bất đẳng thức thông qua việc vận dụng tính đơn điệu của hàm số, hay khai thác đặc trưng tương ứng, biến thiên phụ thuộc để giải toán.

Với loại BT thứ nhất HS dễ dàng hơn trong việc vận dụng TTH để giải

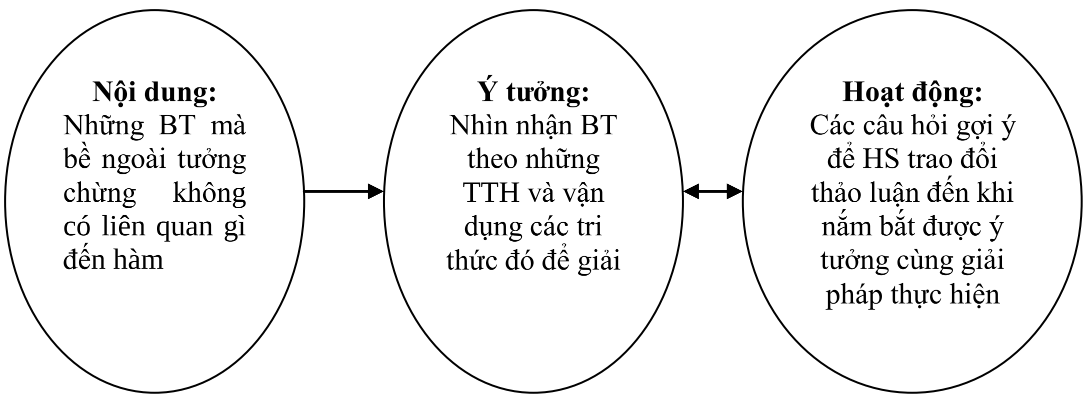
[1]Trường Đại học Đồng Nai

chúng, bởi lẽ khi giải loại toán này HS đã được đặt trong "tình huống hàm". Đối với loại thứ 2 thì không dễ dàng như vậy, làm thế nào để HS có thể giải được một BT nhìn bề ngoài khó nhận ra mối liên hệ với hàm bằng cách vận dụng TTH? Để giải quyết vấn đề này thì trong qúa trình dạy học thông qua các chủ đề (trực tiếp hay gián tiếp liên quan đến TTH) GV có thể dựa vào một số định hướng giúp HS vận dụng TTH trong giải toán, đồng thời xem đây là cơ sở để GV hướng dẫn HS giải các bài toán liên quan đến TTH.

2. Một số định hướng giúp HS vận dụng TTH vào giải toán nhằm phát triển kỹ năng giải toán

Định hướng 1: *Tập trung vào hướng dẫn HS vận dụng được TTH vào việc giải những BT đa dạng mà bề ngoài tưởng chừng không có liên quan gì đến TTH, tuân theo qui trình: Lựa chọn nội dung – Hình thành ý tưởng – Thực hiện hoạt động.*

Theo [1] "Để học được một KN, HS cần biết chúng ta trông chờ ở các em phải có khả năng làm gì, và làm như thế nào (làm chi tiết). Các em phải biết vì sao làm cách đó là tốt nhất, cùng với những thông tin phù hợp (giải thích). Các em phải có cơ hội thực hành (sử dụng), được kiểm tra và hiệu chỉnh đối với việc thực hành đó". Nói cách khác, trong việc hình thành KN cần tuân theo theo qui trình *"Lựa chọn nội dung – Hình thành ý tưởng – Thực hiện hoạt động"*. Về lựa chọn nội dung GV cần tập trung với những dạng toán loại 2 (có thể từ lớp 10), để hình thành ý tưởng GV nên tập HS tự trả lời các dạng câu hỏi như: Có thể giải BT theo hướng vận dụng TTH được không? Muốn thế cần sử dụng những TTH nào? Còn việc thực hiện hoạt động thì cần xây dựng một hệ thống câu hỏi thích hợp để gợi ý cho HS nhằm phát hiện ra những TTH ẩn chứa trong BT và vận dụng nó để có thể giải được BT. Các câu hỏi hoặc do GV đặt ra, HS thảo luận trả lời hay có sự hướng dẫn của GV, hoặc HS tự đặt ra và tự trả lời. Sơ đồ và mối liên hệ của quy trình như sau:



Ví dụ 1 (VD1): *Giải PT:*

$\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}=\sqrt{9x+7}-\sqrt{x-2}$ (1)

- Nội dung: Đây dạng toán thường gặp ở lớp 10, HS có thể giải theo cách thông thường, kết quả x = 2.

- Ý tưởng: Dùng TTH để giải BT theo cách khác *(HS lớp 10 đã học định nghĩa PT và tập xác định của PT).*

- Hoạt động: Liệu có những TTH nào được học có liên quan đến BT? Có thể xem vế trái vế phải của (1) là các hàm số được không?… Từ những gợi ý đó để HS xem (1) dưới dạng f(x) = g(x). Khi đã quan niệm mỗi vế là một hàm số thì gợi cho ta việc đầu tiên cần làm là xét tập xác định của chúng. Từ đó hướng HS tới cách giải: xét $f(x)=\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}$ và

$g(x)=\sqrt{9x+7}-\sqrt{x-2}$, do $D_f \cap D_g=\{2\}$, nên (1) có nghiệm duy nhất x = 2.

VD2: *Giải bất PT:* $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-6}<8$ *(1)*

- Nội dung: Đây là một BT trong SGK toán 10 hiện nay, bài này HS có thể giải theo cách giải thông thường, kết qủa $x \geq 6$.

- Ý tưởng: Dùng TTH để giải BT theo cách khác *(HS lớp 10 đã học tính đơn điệu của hàm số*

y = $\sqrt{x}$*, y =* $\sqrt{x+b}$ *).*

- Hoạt động: Liệu có những TTH nào được học có liên quan đến BT? Ở đây cần có thêm bước hoạt động chuẩn bị để HS có được tri thức về tính đồng biến của hàm số dạng: y = $\sqrt{x+b}+\sqrt{x+c}$.

Từ đó, gợi ý cho HS làm sao xuất hiện được dạng tổng của hai căn bậc hai trong BT? Để hướng HS tới (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{x-6}>\frac{1}{2}$ (2). Có thể xem vế trái của (2) là một hàm số được không? … , từ những gợi ý đó, định hướng HS tới cách giải: Đặt f(x) = $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6}$ (D_f = [6; $+\infty$)), do f đồng biến trên D nên $\forall x \geq 6 \Leftrightarrow f(x) \geq f(6)=2>\frac{1}{2}$. Vậy nghiệm của bất PT là $x \geq 6$.

Lời giải sau của BT có thể không ngắn gọn bằng lời giải đầu, tuy nhiên điều đó có thể giúp HS phát triển KN giải toán đó là *vận dụng tính đơn điệu của hàm số để giải bất PT*. Nếu HS được tập luyện nhiều bằng những BT tương tự thì KN đó trở thành thuần thục, lúc đó HS có thể giải được những BT khó hơn, chẳng hạn: *Giải bất PT* $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+7}$ *> 8.*

VD3: *Cho ba số dương a, b, c, trong đó a > c, b > c. Chứng minh rằng* $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$.

- Nội dung: Đây là BT chứng minh bất đẳng thức, nhìn bề ngoài khó có thể nhận thấy mối liên hệ với những TTH. Thông thường HS sẽ giải theo hướng vận dụng bất đẳng thức Cô – Si hay Bunhiacốpski.

- Ý tưởng: Dùng TTH để giải BT theo cách khác *(HS lớp 10 đã học vectơ, biểu thức tích vô hướng của hai vectơ, có kết quả* $\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$*).*

- Hoạt động: Đây là BT rất khó để tìm ra mối quan hệ giữa TTH với những giả thiết đã cho. Tuy nhiên có thể lợi dụng sự tương ứng *giữa cặp số thực (x;y) với một vectơ, giữa một số thực nào đó với tích vô hướng của hai vectơ, giữa một số thực nào đó với độ lớn của một vectơ*. Từ hình thức của BT, do $\vec{u}.\vec{v} \le |\vec{u}|.|\vec{v}|$, liệu có thể đặt những tương ứng giữa những cặp số trong các số a, b, c với $\vec{u}$ và $\vec{v}$ sao cho $\vec{u}.\vec{v}$ là vế trái, còn $|\vec{u}|.|\vec{v}|$ là vế phải của BĐT? Ý tưởng đó có thể giúp HS tìm ra: $\vec{u} = (\sqrt{a-c};\sqrt{c})$; $\vec{v} = (\sqrt{c};\sqrt{b-c})$, để $\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)}$ và $/\vec{u}/./\vec{v}/= \sqrt{ab}$.

Qua các VD trên (từ mức độ dễ đến khó của sự xuất hiện TTH trong BT), cho ta thấy hai bước: Hình thành ý tưởng (vận dụng những TTH nào) và thực hiện hoạt động (trả lời những câu hỏi nào để tìm ra mối quan hệ giữa ý tưởng và nội dung BT) là quan trọng nhất. Từ đó chúng tôi cho rằng với HS, ngoài việc được trang bị một số TTH cơ bản, thì điều mấu chốt là tự HS (hoặc có sự gợi ý của GV) tìm ra được những TTH ẩn chứa trong BT từ đó có thể tìm ra công cụ thích hợp liên quan đến TTH để giải. Các kỹ thuật: *"Phát hiện hoặc thiết lập cũng như nghiên cứu và lợi dụng những sự tương ứng, biến thiên, phụ thuộc"* giữa các yếu tố trong BT là rất cần thiết. Để làm được điều này HS phải đặt ra cho mình những câu hỏi dưới đây: *Với mỗi phần tử của tập hợp này có chăng một phần tử tương ứng duy nhất liên hệ với nó thuộc tập hợp kia? Liệu có thể biểu diễn sự tương ứng đã phát hiện được bằng công thức của những hàm số quen thuộc không? Liệu có thể tận dụng các tính chất của hàm số như đơn điệu, đồ thị, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất,... để giải BT được không? Với những BT có chứa nhiều đại lượng biến thiên, liệu có thể tận dụng giả thiết và các tính chất chung của nó để qui về một biến? Liệu có thể chuyển hóa nội dung và hình thức BT về BT mới có liên quan đến TTH (đặt ẩn phụ, "phiên dịch" theo ngôn ngữ hàm,...)?* Việc tự trả lời các câu hỏi trên hy vọng giúp HS nhận ra các yếu tố hàm trong BT.

Định hướng 2: *Xây dựng một quy trình giải phù hợp, trong đó chú trọng xây dựng và truyền thu tri thức phương pháp.*

Thông thường có ba giai đoạn để giải BT theo hướng vận dụng TTH. *Giai đoạn 1:* Nhìn nhận BT ban đầu theo hướng vận dụng TTH, rồi "phiên dịch" thành BT mới mang màu sắc "ngôn ngữ hàm". Trong đó chú trọng phần kết luận của BT ban đầu phải "phiên dịch" sao cho sát với những TTH nhằm tạo thuận luận lợi cho hướng tìm lời giải BT mới. *Giai đoạn 2:* Sử dụng các TTH để giải BT mới. *Giai đoạn 3*: "phiên dịch" ngược lại, tức là trả lời những yêu cầu của BT ban đầu.

Việc hình thành cho HS những BT mẫu cũng như đề ra được những PP cụ thể cho từng loại BT là việc làm rất cần thiết, có như thế HS mới có thể "bắt chước" để giải các BT tương tự. GV phải phân tích khéo léo để bật ra được *ý tưởng, xây dựng các câu hỏi thích hợp để hướng HS vận dụng TTH vào giải BT.* Cần chú ý đến việc hướng dẫn HS tự c*huyển hóa nội dung và hình thức BT nhằm tìm ra công cụ thích hợp liên quan đến TTH để giải toán.* Có thể kể một số dạng chuyển đổi BT thường gặp: *Chuyển đổi BT bằng phương pháp (PP) đặt ẩn phụ; Chuyển BT chứng minh BĐT thành BT tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số; Chuyển BT tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số về BT chứng minh BĐT;...*

Xây dựng và truyền thụ những tri thức PP: Việc xây dựng các tri thức PP có thể xuất phát từ những tri thức trong giờ học lý thuyết (nhận dạng tri thức mới), cũng có thể thông qua các hoạt động giải toán (có thể giải một BT cụ thể). GV có thể xây dựng và truyền thụ tri thức PP bằng cách xây dựng các thuật giải (dùng lời hay dùng sơ đồ), sau đó điều chỉnh thuật giải để HS nắm sâu hơn bằng cách phân tích và cho VD dẫn dắt HS kiểm chứng, phát hiện ra những sai lầm và giúp các em vượt qua những khó khăn đó. Chẳng hạn, với giải và biện luận PT, Bất PT, hệ PT, ta có lược đồ giải:

- Biến đổi PT(Bất PT) về dạng f(x) = g(m) hay $f(x) \ge g(m); f(x) \le g(m)$

- Khảo sát sự biến thiên của hàm số f(x) trên tập xác định D, tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

- Từ bảng biến thiên suy ra các giá trị m cần tìm

Nếu hệ PT có dạng $\begin{cases} f(x) = f(y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ ta có thể xét hàm y = f(t) (thường là hàm số liên tục trên tập xác định của nó)

- Nếu hàm f(t) đơn điệu thì ta suy ra x = y và giải tiếp

- Nếu hàm f(t) có một cực trị tại x = t_0, lúc đó ta có x = y hoặc x, y nằm về hai phía của t_0.

Để minh họa rõ nét hơn, chúng ta xét một số BT trong kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng năm 2013 mà khi giải nó có vận dụng đến TTH.

Bài 1 (CĐ - 2013): *Tìm m để bất phương trình*

$(x-2-m)\sqrt{x-1} \le m-4 (1)$ *có nghiệm.*

Lời giải:

$(1) \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{(x-2)\sqrt{x-1}+4}{1+\sqrt{x-1}} \le m$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x) \le m$ có nghiệm $\forall x \in [1;+\infty)$. Đặt $t = \sqrt{x-1}$. $t \ge 0$ lúc đó f(x) trở thành $g(t) = \dfrac{t^3-t+4}{t+1}$ khảo sát hàm số g(t) ta có $m \ge 2$.

Bài 2: (Khối B – 2013).*Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm gi trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức*

$$P = \frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$$

Lời giải: Ta có

$$(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)} \le (a+b)\frac{a+b+4c}{2}$$

$\le 2(a^2+b^2+c^2)$ Đặt $t = \sqrt{a^2+b^2+c^2+4}$, với t > 2. Lúc đó $P \le f(t) = \dfrac{4}{t} - \dfrac{9}{2(t^2-4)}$ với $t > 2$.

$f'(t)=\dfrac{-(t-4)(4t^3+7t^2-4t-16)}{t^2(t^2-4)^2}$ Do $4t^3+7t^2-4t-16=4(t^3-4)+t(7t-4)>0$ khi t > 2, nên f'(t) = 0 khi t = 4. Dựa vào bảng biến thiên f(t) $\Rightarrow P\le\dfrac{5}{8}$.

Khi a = b = c = 2 thì $P=\dfrac{5}{8}$. Vậy GTLN của P là $\dfrac{5}{8}$.

Bài 3 (Khối D – 2013). *Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy\le y-1$. Tìm GTLN của biểu thức*

$$P=\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\frac{x-2y}{6(x+y)}$$

Lời giải: Ta có

$$P=\frac{\frac{x}{y}+1}{\sqrt{(\frac{x}{y})^2-\frac{x}{y}+3}}-\frac{\frac{x}{y}-2}{6(\frac{x}{y}+1)}.$$

Do

$$xy\le y-1\Leftrightarrow\frac{x}{y}\le\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}=-(\frac{1}{y}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$$

nên $0<\dfrac{x}{y}\le\dfrac{1}{4}$. Đặt $t=\dfrac{x}{y}\Rightarrow 0<t\le\dfrac{1}{4}$. Lúc đó

$P=\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\dfrac{t-2}{6(t+1)}=f(t)$, ta có $f'(t)=\dfrac{-3t+7}{2\sqrt{(t^2-t+3)^3}}-\dfrac{1}{2(t+1)^2}$.

$$\forall t\in(0;\frac{1}{4}]\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-3t+7}{2\sqrt{(t^2-t+3)^3}}\ge\dfrac{8\sqrt{5}}{27}\\ -\dfrac{1}{2(t+1)^2}>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$ nên

f'(t) > 0 vì thế f(t) là hàm đồng biến $\forall t\in(0;\frac{1}{4}]\Rightarrow f(t)\le f(\frac{1}{4})=\dfrac{7+10\sqrt{5}}{30}$, nên GTLN của P là $P=\dfrac{7+10\sqrt{5}}{30}$, khi $x=\dfrac{1}{2};y=2$.

Bài 4 (Khối A – 2013). *Giải hệ phương trình* $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y(1)\\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0(2)\end{cases}$

Lời giải: Điều kiện $x\ge1$. Từ (1) ta có $\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{(y^4+1)+1}+\sqrt[4]{(y^4+1)-1}$ (*). Đặt $f(t)=\sqrt{t+1}+\sqrt[4]{t-1}$ thì f đồng biến $\forall t\in[1;+\infty)$, từ (*) ta có $f(x)=f(y^4+1)\Leftrightarrow x=y^4+1$, thế vào (2) ta tìm được nghiệm của hệ là (1;0); (2;1)

Bài 5 (Khối A – 2003): *Cho x, y, z là ba số dương và $x+y+z\le1$, chứng minh rằng*

$$P=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}$$

Lời giải: Đặt

$$\vec{u}=(x;\frac{1}{x});\vec{v}=(y;\frac{1}{y});\vec{w}=(z;\frac{1}{z})$$

$\Rightarrow P=|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|\ge|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|$ hay

$$P\ge\sqrt{(x+y+z)^2+(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})^2}$$

$$\ge\sqrt{9\sqrt[3]{(xyz)^2}+9\sqrt[3]{\frac{1}{(xyz)^2}}}.$$

Đặt $t=\sqrt[3]{(xyz)^2}$

$\Rightarrow 0<t\le(\dfrac{x+y+z}{3})^2\le\dfrac{1}{9}$. Xét hàm

$f(t)=9t+\frac{9}{t};\forall t\in(0;\frac{1}{9}]$ do f(t) nghịch biến $\forall t\in(0;\frac{1}{9}]\Rightarrow f(t)\ge f(\frac{1}{9})=82$

nên $P\ge\sqrt{82}$ (đpcm).

3. Một số dạng toán liên quan

3.1. Hệ hoán vị

Giả sử có hệ : $\begin{cases} f(x_1)=g(x_2)\\ f(x_2)=g(x_3)\\ \dots\dots\dots\dots\\ f(x_n)=g(x_1)\end{cases}$, giải hệ dạng này ta dựa vào tính chất (TC) sau:

TC1: Nếu f(x) và g(x) là các hàm cùng tăng hoặc cùng giảm trên tập xác định và $(x_1,x_2,...,x_n)$ là nghiệm của hệ trên tập xác định thì $x_1=x_2=...=x_n$.

TC2: Nếu f(x) và g(x) khác tính đơn điệu trên tập xác định và $(x_1,x_2,...,x_n)$ là nghiệm của hệ trên tập xác định thì $x_1=x_2=...=x_n$ nếu n lẻ;

$\begin{cases} x_1=x_3=...=x_{n-1}\\ x_2=x_4=...=x_n\end{cases}$ nếu n chẵn.

VD4: Giải hệ:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-2x+6}\,\log_3(6-y)=x\\ \sqrt{y^2-2y+6}\,\log_3(6-z)=y\\ \sqrt{z^2-2z+6}\,\log_3(6-x)=z\end{cases}$$

HDG: Hệ

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3(6-y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}}\\ \log_3(6-z)=\dfrac{y}{\sqrt{y^2-2y+6}}\\ \log_3(6-x)=\dfrac{z}{\sqrt{z^2-2z+6}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(y)=g(x)\\ f(z)=g(y)\\ f(x)=g(z)\end{cases}$$

Trong đó

$$f(t)=\log_3(6-t)\quad;\quad g(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2-2t+6}}$$

với $t\in(-\infty;6)$; Ta có $f(t)$ là hàm nghịch biến và $g(t)$ có

$$g'(t)=\frac{6-t}{\sqrt{\left(t^2-2t+6\right)^3}}>0$$

$\forall t\in(-\infty;6)\Rightarrow g(t)$ là hàm đồng biến. $\Rightarrow x=y=z$ .thay vào hệ ta có :

$\log_3(6-x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}}$ PT này có nghiệm duy nhất $x=3$ $\Rightarrow x=y=z=3$.

3.2. Ứng dụng hàm lồi

TC1 *(Bất đẳng thức tiếp tuyến)*

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp hai trên [a;b] .

a) Nếu $f''(x)\ge 0\ \forall x\in[a;b]$ thì $f(x)\ge f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\quad\forall x_0\in[a;b]$

b) Nếu $f''(x)\le 0\ \forall x\in[a;b]$ thì $f(x)\le f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\quad\forall x_0\in[a;b]$

TC2 *(Bất đẳng thức cát tuyến)*

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp hai trên [a;b] .

a) Nếu $f''(x)\ge 0\ \forall x\in[a;b]$ thì

$$f(x)\ge\frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)+f(a)\quad\forall x_0\in[a;b]$$

b) Nếu $f''(x)\le 0\ \forall x\in[a;b]$ thì

$$f(x)\le\frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)+f(a)\quad\forall x_0\in[a;b]$$

Đẳng thức trong các BĐT trên có khi và chỉ khi $x = a$ hoặc $x = b$.

VD5 *(Vô địch Toán Ba Lan 1996)*: Cho $a, b, c \geq -\frac{3}{4}$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}.$$

HDG: Ta thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ và BĐT đã cho có dạng:

$f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{9}{10}$ trong đó $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ với $x \in [-\frac{3}{4}; \frac{5}{2}]$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{3}$ là : $y = \frac{36x+3}{50}$.

Ta có:

$$\frac{36x+3}{50} - f(x) = \frac{36x+3}{50} - \frac{x}{x^2+1}$$

$$= \frac{(3x-1)^2(4x+3)}{50(x^2+1)} \geq 0 \;\; \forall x \in [-\frac{3}{4}; \frac{5}{2}]$$

Vậy :

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{36(a+b+c)+9}{50} = \frac{9}{10}$$

đpcm.

3.3. Ứng dụng đồ thị

Nếu đồ thị y = f(x) và y = g(x) tiếp xúc nhau tại x_0 thì tồn tại một khoảng (a;b) chứa x_0 sao cho trên khoảng đó, đồ thị này nằm dưới đồ thị kia nên $f(x) \geq (\leq) g(x), \forall x \in (a;b)$. Sử dụng TC này ta có thể chứng minh một số BĐT có dạng sau: Cho $a_i \in D \subseteq R, i = \overline{1,n}$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} g(a_i) \geq (\leq) n g(m)$ với m thuộc D, chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geq (\leq) n f(m)$.

Để giải loại toán này, ta đi tìm các số thực a, b sao cho đồ thị hàm số y = f(x) tiếp xúc với đồ thị hàm số y = ag(x) + b tại x_0 = m. Sau đó ta chứng minh đồ thị nảy nằm dưới đồ thị kia trong một khoảng hay đoạn nào đó. Có thể chia ra một số dạng cụ thể như sau:

Dạng 1: Bài toán có giả thiết tổng bình phương các biến bằng hằng số:

VD6. Cho các số a,b,c dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+c^2} + \frac{c}{b^2+a^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

HDG: Do a,b,c $\in (0;1)$. Ta có

$$\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+c^2} + \frac{c}{b^2+a^2} = \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2}$$

Từ đó ta tìm hai số m, n sao cho đồ thị hàm số $y = mx^2 + n$ nằm phía dưới đồ thị hàm số $y = \frac{x}{1-x^2}$ trong khoảng $(0;1)$ và tiếp xúc nhau tại $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Từ điều kiện tiếp xúc $\begin{cases} \frac{x}{1-x^2} = mx^2 + n \\ \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} = 2mx \end{cases}$ có nghiệm $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ta tìm được $m = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ và n = 0. Ta chứng minh $\frac{x}{1-x^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2, \forall x \in (0;1)$, từ đó ta có đpcm.

Dạng 2: Bài toán có giả thiết tích các biến bằng hằng số:

VD7: Cho các số a,b,c dương thỏa mãn abc=1, chứng minh rằng :

$$\frac{a}{\sqrt{1+a}}+\frac{b}{\sqrt{1+b}}+\frac{c}{\sqrt{1+c}}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

HDG: Từ abc = 1, ta có lna + lnb +lnc = 0. Ta tìm hai số m, n sao cho đồ thị hàm số $y=m\ln x+n$ nằm phía dưới đồ thị hàm số $y=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ trong khoảng $(0;+\infty)$ và tiếp xúc nhau tại $x_0=1$. Từ điều kiện tiếp xúc $\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{1+x}}=m\ln x+n\\ \frac{2+x}{2\sqrt{(1+x)^3}}=\frac{m}{x}\end{cases}$ có nghiệm $x_0=1$, ta tìm được $m=\frac{3}{4\sqrt{2}}$ và $n=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta chứng minh $\frac{x}{\sqrt{1+x}}\geq\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln x+\frac{1}{\sqrt{2}},\forall x\in(0;+\infty)$ b ằng cách xét hàm số

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln x-\frac{1}{\sqrt{2}},\forall x\in(0;+\infty)$$

ta có bảng biến thiên

X	0	1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘	0	↗

Nên $f(x)\geq f(1)=0$, từ đó ta có đpcm.

Dạng 3: Bài toán bất đẳng thức đồng bậc có hiệu giữa bậc của tử và bậc của mẫu khác 1:

VD8: Cho các số a,b,c dương , chứng minh rằng

$$\frac{a^3-b^3}{a+3b}+\frac{b^3-c^3}{b+3c}+\frac{c^3-a^3}{c+3a}\geq 0$$

HDG: Ta tìm hai số m, n sao cho đồ thị hàm số $y=mx^2+n$ nằm phía dưới đồ thị hàm số $y=\frac{x^3-1}{x+3}$ trong khoảng $(0;+\infty)$ và tiếp xúc nhau tại $x_0=1$. Từ điều kiện tiếp xúc $\begin{cases}\frac{x^3-1}{x+3}=mx^2+n\\ \frac{2x^3+9x^2+1}{(x+3)^2}=2mx\end{cases}$ có nghiệm $x_0=1$, ta tìm được $m=\frac{3}{8}$ và $n=\frac{-3}{8}$. Ta chứng minh

$\frac{x^3-1}{x+3}\geq\frac{3}{8}(x^2-1),\forall x\in(0;+\infty)$, từ đó ta có đpcm.

4. Một số bài toán vận dụng

Bài 1(*HSG QG – 1996*): Hãy biện luận số nghiệm thực x,y của hệ phương trình sau theo tham số a,b:

$$\begin{cases}x^3y-y^4=a^2\\ x^2y+2xy^2+y^3=b^2\end{cases}$$

Bài 2 (*HGS QG – 2005*): Cho các số thực a,b,c. Chứng minh rằng

$$6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\leq 27abc+10(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}$$

Bài 3 (*HSG QG – 2007*): Hãy xác định số nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}x^2+y^3=29\\ \log_3 x.\log_2 y=1\end{cases}$$

Bài 4 *(Albania 2002)*: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geq a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Bài 5 *(Olympic Toán Nhật Bản 1997)*. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}$$

Bài 6 (*Trung Quốc 2005*): Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5) \geq 1$$

Bài 7:

a) Cho x, y, z dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-(x+y+z) \geq 2\sqrt{3}$$

b) Cho x, y, z dương thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{1+yz}+\frac{y^2}{1+xz}+\frac{z^2}{1+yx} \geq \frac{3}{2}$$

c) Cho các số a, b, c dương, chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{a+4b}+\frac{b^4}{b+4c}+\frac{c^4}{c+4a} \geq \frac{a^3+b^3+c^3}{5}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Geoffrey Petly (1998), *Teaching today,* Stanley Thornes Publishers, United Kingdom

2. Nguyễn Bá Kim (2008), *Phương pháp dạy học môn Toán*, Nxb. Đại học sư phạm

3. Đinh Quang Minh, (2004), *Tri thức về hàm với những kĩ năng giải một số loại toán ở lớp 10 THPT*, Tạp chí Thông tin Khoa học giáo dục, Hà Nội số 108/2004, tr 24 -28

4. Lê Hồ Quý (2012), *Sử dụng đạo hàm để giải một số loại toán*, Toán học & Tuổi trẻ, số 423/2012

5. Nguyễn Tuấn Ngọc (2014), *Dùng phương pháp đồ thị để chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất*, Toán học & Tuổi trẻ số 442/2014

6. Nguyễn Tất Thu, Trần Văn Thương (2010), *Phương pháp hàm số trong các bài toán Đại số*, Nxb. Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh

APPYING KNOWLEDGE OF ARITHMETIC FUNCTION TO SOLVE SOME HIGH SHOOL MATHMATIC PROBLEMS

ABSTRACT

The subject of arithmetic function appears throughout high school math syllabus. Thus, applying knowledge of arithmetic function to solve mathematic problems, through which students can practice skill of solving mathematic problems is considered necessary. The writing aims at not only showing that some high school mathematic forms can be solved thanks to applying knowledge of arithmetic function but also suggesting some pedagogic orientations which help teachers guide students in mathematic practice in order that they can form a certain mathematic solving skills through this application. Those forms of mathematics often appear in curriculum of grade 10, 11, 12 and also commonly in university entrance exam papers.

Keywords: *knowledge of arithmetic function, mathematic solving skill, content, idea, activity*